II Développements d'analyse

Formules des compléments

II.A Formules des compléments

Théorème 17: Formule des compléments

$$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}, \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Démonstration. Quitte à utiliser le théorème du prolongement analytique, on va démontrer le théorème sur $]0,1[$ qui admet les points d'accumulation.

Soit $s \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} u^{-s}e^{-u}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u^{-s}e^{-u}\mathrm{d}u\right)x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x \\
&\overset{xv=u}{=} \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} x^{-s}v^{-s}e^{-xv}x\mathrm{d}v\right)x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Fubini-Tonnelli}}{=} \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-x(v+1)}\mathrm{d}x\right)v^{-s}\mathrm{d}v \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{v^{-s}}{v+1}\mathrm{d}v \\
&\overset{\text{symétrie des rôles de } s \text{ et } 1-s}{=} \int_0^{+\infty} \frac{v^{s-1}}{v+1}\mathrm{d}v \\
&\overset{v=e^t}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ts}e^{-t}}{e^t+1}e^t\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

On pose $f \ : \ z \mapsto \frac{e^{zs}}{e^z+1}$. Alors f est holomorphe sauf en $i\pi + 2i\pi\mathbb{Z}$ où elle admet des pôles d'ordre 1.

Aussi, a-t-on :

$$\mathrm{Res}_{i\pi}(f) = \lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)\frac{e^{sz}}{e^z-1} = \lim_{z\to i\pi}\frac{(z-i\pi)}{e^z-e^{i\pi}}e^{sz} = \frac{e^{i\pi s}}{e^{i\pi}} = -e^{i\pi s}$$

car on reconnaît l'inverse du taux d'accroissement de la fonction entière exponentielle et que l'on connaît sa dérivée complexe : elle-même.

Soit $R>0$, on utilise le théorème des résidus avec le contour suivant :
On appelle γ_R le rectangle de sommets $-R,\ R,\ R+2i\pi,\ -R+2i\pi$ parcours dans le sens trigonométrique (anti-horaire)

On a :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{Res}_{i\pi}(f)\cdot \mathrm{ind}_{\gamma_R}(i\pi) = -e^{i\pi s}$$

$$\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \underbrace{\int_{-R}^{-R}\frac{e^{ts}}{e^t+1}}_{I_1} + \underbrace{i\int_0^{2\pi}\frac{e^{(R+it)s}}{e^{R+it}+1}\mathrm{d}s}_{I_2} + \underbrace{\int_R^{-R}\frac{e^{(t+2i\pi)s}}{e^{t+2i\pi}+1}\mathrm{d}s}_{I_3} + \underbrace{i\int_{2\pi}^0\frac{e^{(-R+it)s}}{e^{-R+it}+1}\mathrm{d}s}_{I_4}.$$

On calcule séparément les 4 intégrales que l'on vient d'isoler :

— ⋆ $I_1 \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(s)\Gamma(1-s)$;

— ⋆ $I_3 = -e^{2i\pi s}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ts}}{e^{t\pi}+1}\mathrm{d}s \to -e^{2i\pi s}\Gamma(s)\Gamma(1-s)$;

— ⋆ Par inégalité triangulaire ($|\,|a|-|b|\,| \leqslant |a+b|$), on peut obtenir une majoration de l'intégrande de I_2 :
$$\left|\frac{e^{(R+it)s}}{e^{R+it}+1}\right| = \frac{e^{Rs}}{|e^{R+it}+1|} \leqslant \frac{e^{Rs}}{e^R-1} \underset{R\to+\infty}{\sim} e^{R(s-1)}.$$
On déduit de cette majoration la majoration suivante :
$$|I_2| \leqslant 2\pi\frac{e^{Rs}}{e^R-1} \to 0 \qquad\qquad \text{car } s<1;$$

— ⋆ On procède de même sur I_4 :
$$\left|\frac{e^{(-R+it)s}}{e^{-R+it}+1}\right| = \frac{e^{-Rs}}{|e^{-R+it}+1|} \leqslant \frac{e^{-Rs}}{1-e^{-R}} \underset{R\to+\infty}{\sim} e^{-Rs}.$$
On déduit de cette majoration la majoration suivante :
$$|I_4| \leqslant 2\pi\frac{e^{-Rs}}{1-e^{-R}} \to 0 \qquad\qquad \text{car } s>0.$$

Ainsi au total
$$\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \left(1-e^{2i\pi s}\right)\Gamma(s)\Gamma(1-s)$$
$$\Rightarrow \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{-2i\pi e^{i\pi s}}{1-e^{2i\pi s}} = \frac{-2i\pi}{e^{-i\pi s}-e^{i\pi s}}\frac{e^{i\pi s}}{e^{i\pi s}} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

■